(1975. 7. 15 受理)

拡大システムによるある擬線形状態推定について

天　野　正　章

On a Quasi-Linear State Estimates by Augumented Systems

Masaaki AMANO

SYNOPSIS

Recently, a quasi-linear state estimates has been obtained in the author's work[1], in which it is assumed that the observed signals are the nonlinear vector function of two signals (state vectors) and observed noises, and that each of two signals is taken for the solutions of the stochastic nonlinear differential equations with gaussian white noise inputs. The desired estimate is for one of two signals. And, optimal estimate processes are reduced to the solution of the simultaneous differential equations which are composed of two differential equations for the estimate processes and six for the error variances.

In this paper, it is proved that obtained estimates are optimal, and that six differential equations for error variances are degenerated to four.

1. まえがき

2個の状態ベクトルと外乱とが非線形結合を生じて観測ベクトルを生じている場合，そのような観測データにもとづいて2個のうち一方の状態ベクトルを推定する問題がすでに筆者によって報告されている[1]。2個の状態ベクトルはそれぞれあるタイプの非線形確率微分方程式で表わされる力学系によって支配されていると仮定されているので，非線形性の故にある線形化近似過程を通らざるをえない。筆者は確率的線形化近似を採用した上で，上述のような問題を結局2個の推定過程を示す微分方程式と6個の誤差の分散行列に関する微分方程式とを連立させた形で解くことに帰着せしめている。しかしながらそこで得られた推定値がはたして最適な値であるかどうかについては必ずしも明確にはなされなかった。

本論文において拡大システムを導入することにより先にえられた結果をより取り扱いを容易にすると共に，えられた推定値が最適なものであることを明らかにしたい。その結果，求めたい状態ベクトルの推定値は2個の推定過程を表わす微分方程式と4個の誤差の分散行列微分方程式とを連立されて解けば良いことが明らかにされた。したがって先にえられた結果において6個の誤差の分散行列微分方程式群のうち2個は他の2個の微分方程式と全く等価なことも示

されている。なお確率的線形化近似によってえられた推定過程を擬線形状態推定過程と呼ぶことによると共に，後述するような，ある制御基準にもとづいてえられた推定過程を最適推定過程と呼ぶことは周知の事実である。したがって確率的線形化近似過程をへてえられた推定過程を最適擬線形状態推定過程と呼ぶこともごく自然のことのように思はれる。

2. 問題の提起と力学形，観測系の線形化

先に筆者は次のような問題を提起した[1]。すなわち

$$d\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{F}_1[t,\boldsymbol{x}(t)]dt+\boldsymbol{G}_1(t)d\boldsymbol{w}_1(t) \tag{1}$$

$$d\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{F}_2[t,\boldsymbol{y}(t)]dt+\boldsymbol{G}_2(t)d\boldsymbol{w}_2(t) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{y}(t_0)=\boldsymbol{y}_0 \tag{4}$$

なる確率微分方程式によって支配される２個の状態ベクトル（入力信号）$\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{y}(t)$ に対して，観測信号 $z(t)$ が次式であたえられているものとする。

$$dz(t)=\boldsymbol{H}[t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t),\boldsymbol{V}(t)]dt \tag{5}$$

ここで，形式的にではあるけれども

$$\boldsymbol{Z}(t)=\frac{dz(t)}{dt} \tag{6}$$

で定義される $\boldsymbol{Z}(t)$ を観測信号と以下考えることにする。そこで(1)，(2)，(5)の代りに次のシステムを採用することにする。

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}=\boldsymbol{F}_1[t,\boldsymbol{x}(t)]+\boldsymbol{G}_1(t)\boldsymbol{W}_1(t) \tag{7}$$

$$\frac{d\boldsymbol{y}(t)}{dt}=\boldsymbol{F}_2[t,\boldsymbol{y}(t)]+\boldsymbol{G}_2(t)\boldsymbol{W}_2(t) \tag{8}$$

$$\boldsymbol{Z}(t)=\boldsymbol{H}[t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t),\boldsymbol{V}(t)] \tag{9}$$

ただし各記号の意味は次のごとくである。

$\boldsymbol{x}(t)$：$n_1\times 1$ ベクトル

$\boldsymbol{y}(t)$：$n_2\times 1$ ベクトル

$\boldsymbol{F}_1[\ \ ]$：$n_1\times 1$ ベクトル値関数

$\boldsymbol{F}_2[\ \ ]$：$n_2\times 1$ ベクトル値関数

$\boldsymbol{w}_1(t)$：$m_1\times 1$ ベクトルブラウン運動過程

$\boldsymbol{w}_2(t)$：$m_2\times 1$ ベクトルブラウン運動過程

$\boldsymbol{G}_1(t)$：$n_1\times m_1$ 行列で t について連続

$\boldsymbol{G}_2(t)$：$n_2\times m_2$ 行列で t について連続

t：現在時刻

t_0：系の解発生開始時刻

(1)，(2)の解は存在しかつ一意的であるものとすると共に

$$W_1(t)=\frac{dw_1(t)}{dt} \tag{10}$$

$$W_2(t)=\frac{dw_2(t)}{dt} \tag{11}$$

$$V(t)=\frac{dv(t)}{dt} \tag{12}$$

と定めていて，それらは次のような意味をもつものとする。

$W_1(t)$: $m_1\times1$ ベクトルで正規白色雑音

$W_2(t)$: $m_2\times1$ ベクトルで正規白色雑音

$v(t)$: $d\times1$ ベクトルでブラウン運動過程

$V(t)$: $d\times1$ ベクトルで正規白色雑音

$Z(t)$: $n_3\times1$ ベクトル

$z(t)$: $n_3\times1$ ベクトル

$H[\ \ ]$: $n_3\times1$ ベクトル値関数

ただし　$n_1\geqq n_3$, $n_2\geqq n_3$

また各共分散行列を期待値演算Eによって次のように定める。

$$\mathrm{cov}[x(t),y(\tau)]=E[x(t)y'(\tau)]-E[x(t)]E[y'(\tau)] \tag{13}$$

$$\mathrm{cov}[W_1(t),W_1(\tau)]=Q(t)\delta(t-\tau) \tag{14}$$

$$\mathrm{cov}[W_2(t),W_2(\tau)]=R(t)\delta(t-\tau) \tag{15}$$

$$\mathrm{cov}[W_1(t),W_2(\tau)]=0 \tag{16}$$

$$\mathrm{cov}[V(t),V(\tau)]=S(t)\delta(t-\tau) \tag{17}$$

$$\mathrm{cov}[W_1(t),V(\tau)]=\mathrm{cov}[W_2(t),V(\tau)]=0 \tag{18}$$

ここで $'$ は転置を示し

$Q(t)$: $m_1\times m_1$ 行列　t について連続微分可能

$R(t)$: $m_2\times m_2$ 行列　t について連続微分可能

$S(t)$: $d\times d$ 行列　t について連続微分可能

また $Q(t)$, $R(t)$, $S(t)$ はすべて正定置形式である。$\delta(t-\tau)$ はディラックのデルタ関数を表わす。

いま $x(t)$ の双対ベクトル空間の要素，すなわち共状態ベクトル x^* を導入し，その第 i 成分を x_i^* とする。ここで x^* は $1\times n$ ベクトルであって $i=1.2\cdots\cdots n$ とする。このとき x^* の $x(t)$ における値を

$$[x^*,x(t)]=\sum_{i=1}^{n}x_i^*\,x_i(t) \tag{19}$$

で定義しておけば

$$[x^*,x(t)]^2=[x^*\,x(t)]^2x^*\,x(t)\,x'(t)\,x^{*\prime} \tag{20}$$

なる演算も許される。以上の準備のもとに

問題 1

時間 $t_0 \leqq \tau \leqq t$ における観測信号 $\boldsymbol{Z}(\tau)$ があたえられているとき $E[\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)]^2$ をすべての $\boldsymbol{x}^*$ に対して最小によるような推定

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)=E\{\boldsymbol{x}(t)|Z_t\}=\int_{E^{(n)}}\boldsymbol{x}(t)P\{\boldsymbol{x}(t)|Z_t\}\,d\boldsymbol{x}(t) \tag{21}$$

を求めよ。ただし $\boldsymbol{E}^{(n)}$ は n 次元ユークリッド空間を示し，Z_t は $t_0 \leqq \tau < t$ における観測信号 $\boldsymbol{Z}(\tau)$ の集合 $Z_t\{\boldsymbol{Z}(\tau) : t_0 \leqq \tau < t\}$ を表わしている。また $P\{\quad|Z_t\}$ は条件つき 確率密度関数である。

のように問題が提起される。しかしながら(7)〜(9)のシステムは非線形であるから，一般に $\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{y}(t)$ に関して，無限次元のモーメントに関する情報を必要とするから解けないことになる。そこで次のような近似プロセスを採用することにする。すなわち，$\boldsymbol{F}_1[t, \boldsymbol{x}(t)]$，$\boldsymbol{F}_2[t, \boldsymbol{y}(t)]$，$\boldsymbol{H}[t, \boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{y}(t),\ \boldsymbol{V}(t)]$ を $\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{y}(t)$ の推定値 $\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)$，$\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)$ のまわりでテーラー展開を行うことにする。

$$\boldsymbol{F}_1[t, \boldsymbol{x}(t)]=\boldsymbol{\theta}_1(t)+\boldsymbol{\Theta}_1(t)[\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)]+\boldsymbol{e}_x(t) \tag{22}$$

$$\boldsymbol{F}_2[t, \boldsymbol{y}(t)]=\boldsymbol{\theta}_2(t)+\boldsymbol{\Theta}_2(t)[\boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)]+\boldsymbol{e}_y(t) \tag{23}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}[t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{V}(t)]&=\boldsymbol{\theta}_3(t)+\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)[\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)]\\&\quad+\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)[\boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)]+\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)\boldsymbol{V}(t)+\boldsymbol{e}_H(t)\end{aligned} \tag{24}$$

このとき Z_t に関してそれぞれの誤差項 $\boldsymbol{e}_x(t)$，$\boldsymbol{e}_y(t)$，$\boldsymbol{e}_H(t)$ のノルムを導入することによって，$E[\|\boldsymbol{e}_x(t)\|^2|Z_t\}$, $E\{\|\boldsymbol{e}_y(t)\|^2|Z_t\}$, $E\{\|\boldsymbol{e}_H(t)\|^2|Z_t\}$ をそれぞれ最小にすることによって各展開係数を求めて，それらを採用することによってそれぞれの誤差項を省略すると(1)，(2)，(5)は

$$d\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\Theta}_1(t)\boldsymbol{x}(t)dt+\{\boldsymbol{\theta}_1(t)-\boldsymbol{\Theta}_1(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)\}dt+\boldsymbol{G}_1(t)d\boldsymbol{w}_1(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{25}$$

$$d\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{\Theta}_2(t)\boldsymbol{y}(t)dt+\{\boldsymbol{\theta}_2(t)-\boldsymbol{\Theta}_2(t)\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)\}dt+\boldsymbol{G}_2(t)d\boldsymbol{w}_2(t),\quad \boldsymbol{y}(t_0)=\boldsymbol{y}_0 \tag{26}$$

$$\begin{aligned}d\boldsymbol{z}(t)&=\{\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)\boldsymbol{y}(t)\}dt+\{\boldsymbol{\theta}_3(t)-\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)\\&\quad-\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)\}dt+\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)d\boldsymbol{v}(t),\quad \boldsymbol{z}(t_0)=0\end{aligned} \tag{27}$$

となる。すなわち

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt}=\boldsymbol{\Theta}_1(t)\boldsymbol{x}(t)+\{\boldsymbol{\theta}_1(t)-\boldsymbol{\Theta}_1(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)\}+G_1(t)\boldsymbol{W}_1(t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{28}$$

$$\frac{d\boldsymbol{y}(t)}{dt}=\boldsymbol{\Theta}_2(t)\boldsymbol{y}(t)+\{\boldsymbol{\theta}_2(t)-\boldsymbol{\Theta}_2(t)\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)\}+\boldsymbol{G}_2(t)\boldsymbol{W}_2(t),\quad \boldsymbol{y}(t_0)=\boldsymbol{y}_0 \tag{29}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{Z}(t)&=\{\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)\boldsymbol{y}(t)\}+\{\boldsymbol{\theta}_3(t)-\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)-\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)\}\\&\quad+\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)\boldsymbol{V}(t),\quad \boldsymbol{Z}(t_0)=0\end{aligned} \tag{30}$$

したがって問題1は次のように言いかえるのがより実際的である。

問題 2

$E[\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)]^2$ をすべての $\boldsymbol{x}^*$ に対して最小にするような推定

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)=E\{\boldsymbol{x}(t)|Z_t\}=\int_{E^{(n)}}\boldsymbol{x}(t)P\{\boldsymbol{x}(t)|Z_t\}\,d\boldsymbol{x}(t) \tag{31}$$

を求めよ。

ただし $\boldsymbol{x}(t)$ は(28)の力学形で支配されていて $\boldsymbol{Z}(t)$ は(30)であたえられる観測系である。Z_t は問題1の場合と同様である。

さてこのようにして提起された問題を解くわけであるが，(25)，(26)，(27)あるいは(28)，(29)，(30)のシステムそののままの形で取り扱う代りに便宜上若干の変形を行うことにする。すなわち，$\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{y}(t)$，$\boldsymbol{z}(t)$ の代りにそれぞれ新しいベクトル $\boldsymbol{\xi}^x(t)$，$\boldsymbol{\xi}^y(t)$，$\boldsymbol{\eta}^z(t)$ を導入して

$$\boldsymbol{\xi}^x(t)=\boldsymbol{x}(t)+\rho^x(t) \tag{32}$$

$$\boldsymbol{\xi}^x(t_0)=\boldsymbol{x}(t_0) \tag{33}$$

$$\boldsymbol{\xi}^y(t)=\boldsymbol{y}(t)+\rho^y(t) \tag{34}$$

$$\boldsymbol{\xi}^y(t_0)=\boldsymbol{y}(t_0) \tag{35}$$

$$\boldsymbol{\eta}^z(t)=\boldsymbol{Z}(t)-\rho^{xy}(t) \tag{36}$$

$$\boldsymbol{\eta}^z(t_0)=0 \tag{37}$$

と定める。ただし $\rho^x(t)$，$\rho^y(t)$ は(28)，(29)の推移行列をそれぞれ $\boldsymbol{\Phi}^x(t,s)$ $\boldsymbol{\Phi}^y(t,s)$ としたとき

$$\rho^x(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^x(t,s)\{\boldsymbol{\Theta}_1(s)\hat{\boldsymbol{x}}(s|s)-\boldsymbol{\theta}_1(s)\}ds \tag{38}$$

$$\rho^y(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}^y(t,s)\{\boldsymbol{\Theta}_2(s)\hat{\boldsymbol{y}}(s|s)-\boldsymbol{\theta}_2(s)\}ds \tag{39}$$

で定義される。さらに $\rho^{xy}(t)$ は次式であたえられる。

$$\rho^{xy}(t)=\int_{t_0}^{t}\{\boldsymbol{\theta}_3(t)-\boldsymbol{\Theta}_{3x}(s)\hat{\boldsymbol{x}}(s|s)\}ds-\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Theta}_{3y}(s)\hat{\boldsymbol{y}}(s|s)ds \tag{40}$$

このようにして

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}^x(t)}{dt}=\boldsymbol{\Theta}_1(t)\boldsymbol{\xi}^x(t)+\boldsymbol{G}_1(t)\boldsymbol{W}_1(t) \quad \boldsymbol{\xi}^x(t_0)=\boldsymbol{x}(t_0) \tag{41}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}^y(t)}{dt}=\boldsymbol{\theta}_2(t)\boldsymbol{\xi}^y(t)+\boldsymbol{G}_2(t)\boldsymbol{W}_2(t) \quad \boldsymbol{\xi}^y(t_0)=\boldsymbol{y}(t_0) \tag{42}$$

をうる。(41)，(42)は変換された力学系を示している。さらに新しい確率過程

$$d\boldsymbol{\eta}^z(t)=\{\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)\boldsymbol{y}(t)\}dt+\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)dv(t) \tag{43}$$

を導入することによって，さらに新しい確率過程を

$$d\boldsymbol{\eta}(t)=d\boldsymbol{\eta}^z(t)+\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)\rho^x(t)dt+\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)\rho^y(t)dt \quad \boldsymbol{\eta}(t_0)=0 \tag{44}$$

と定めると，変換された観測系

$$d\boldsymbol{\eta}(t)=\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)\boldsymbol{\xi}^x(t)dt+\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)\boldsymbol{\xi}^y(t)dt+\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)dv(t) \tag{45}$$

あるいは

$$\bar{\boldsymbol{\eta}}(t)=\frac{d\boldsymbol{\eta}(t)}{dt}\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)\boldsymbol{\xi}^x(t)+\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)\boldsymbol{\xi}^y(t)+\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)\boldsymbol{V}(t) \tag{46}$$

をうる。したがって一応 $\boldsymbol{x}(t)$ の推定を行うのに(46)の観測にしたがって，$\boldsymbol{\xi}^x(t)$ の推定を行

ってから $\boldsymbol{x}(t)$ の推定がえられるということになる。ただしこれらの展開において

$\boldsymbol{\theta}_1(t)$: $n_1\times 1$ ベクトル

$\boldsymbol{\theta}_2(t)$: $n_2\times 1$ ベクトル

$\boldsymbol{\theta}_3(t)$: $n_3\times 1$ ベクトル

$\boldsymbol{\Theta}_1(t)$: $n_1\times n_1$ 行列

$\boldsymbol{\Theta}_2(t)$: $n_2\times n_2$ 行列

$\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)$: $n_3\times n_1$ 行列

$\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)$: $n_3\times n_2$ 行列

$\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)$: $n_3\times d$ 行列

$\boldsymbol{e}_x(t)$: $n_1\times 1$ ベクトル

$\boldsymbol{e}_y(t)$: $n_2\times 1$ ベクトル

$\boldsymbol{e}_H(t)$: $n_3\times 1$ ベクトル

を表わしていて

$$\boldsymbol{\theta}_1(t)=E\{\boldsymbol{F}_1[t,\boldsymbol{x}(t)]|Z_t\}=\hat{\boldsymbol{F}}_1[t,\boldsymbol{x}(t)] \tag{47}$$

$$\boldsymbol{\theta}_2(t)=E\{\boldsymbol{F}_2[t,\boldsymbol{y}(t)]|Z_t\}=\hat{\boldsymbol{F}}_2[t,\boldsymbol{y}(t)] \tag{48}$$

$$\boldsymbol{\theta}_3(t)=E\{\boldsymbol{H}[t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t),V(t)]|\boldsymbol{Z}_t\}=\hat{\boldsymbol{H}}[t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t),V(t)] \tag{49}$$

$$\boldsymbol{\Theta}_1(t)=E\{[\boldsymbol{F}_1[t,\boldsymbol{x}(t)]-\hat{\boldsymbol{F}}_1[t,\boldsymbol{x}(t)][\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)]'|Z_t\}\cdot P_x(t|t)^{-1} \tag{50}$$

$$\boldsymbol{\Theta}_2(t)=E\{[\boldsymbol{F}_2[t,\boldsymbol{y}(t)]-\hat{\boldsymbol{F}}_2[t,\boldsymbol{y}(t)]][\boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)]'|Z_t\}\cdot P_y(t|t)^{-1} \tag{51}$$

ただし

$$P_x(t|t)=\mathrm{cov}[\boldsymbol{x}(t)|Z_t]=E[\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}'(t)|Z_t]-E[\boldsymbol{x}(t)|Z_t]E[\boldsymbol{x}'(t)|Z_t] \tag{52}$$

$$P_y(t|t)=\mathrm{cov}[\boldsymbol{y}(t)|Z_t]=E[\boldsymbol{y}(t)\boldsymbol{y}'(t)|Z_t]-E[\boldsymbol{y}(t)|Z_t]E[\boldsymbol{y}'(t)|Z_t] \tag{53}$$

であたえられる。さらに

$$\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)=\xi_1(t|t)\boldsymbol{\alpha}(t|t)+\xi_2(t|t)\boldsymbol{\gamma}(t|t) \tag{54}$$

$$\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)=\xi_1(t|t)\boldsymbol{\beta}(t|t)+\xi_2(t|t)\boldsymbol{\delta}(t|t) \tag{55}$$

であたえられるが，

$$\begin{aligned}\xi_1(t|t)=E\{[&\boldsymbol{H}[t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t),V(t)]-\hat{\boldsymbol{H}}[t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t),V(t)\\&\cdot[\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)]'|Z_t\}\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}\xi_2(t|t)=E\{[&\boldsymbol{H}[t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t),V(t)]-\hat{\boldsymbol{H}}[t,\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t),V(t)]]\\&\cdot[\boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)]'|Z_t\}\end{aligned} \tag{57}$$

また誤差の共分散行列

$$\begin{aligned}P_{xy}(t|t)&=\mathrm{cov}[\boldsymbol{x}(t),\boldsymbol{y}(t)|Z_t]\\&=E\{\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{y}'(t)|Z_t\}-E\{\boldsymbol{x}(t)|Z_t\}E\{\boldsymbol{y}'(t)|Z_t\}\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}P_{yx}(t|t)&=\mathrm{cov}[\boldsymbol{y}(t),\boldsymbol{x}(t)|Z_t]\\&=E\{\boldsymbol{y}(t)\boldsymbol{x}'(t)|Z_t\}-E\{\boldsymbol{y}(t)|Z_t\}\{E\{\boldsymbol{x}'(t)|Z_t\}\end{aligned} \tag{59}$$

により

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}(t|t), & \boldsymbol{\beta}(t|t) \\ \boldsymbol{\gamma}(t|t), & \boldsymbol{\delta}(t|t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^{x}(t|t), & P^{xy}(t|t) \\ P^{yx}(t|t), & P^{y}(t|t) \end{pmatrix}^{-1} \tag{60}$$

であたえられる。さらに $\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)$ は次式であたえられる。

$$E\{\boldsymbol{H}[t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t), \boldsymbol{V}(t)]\boldsymbol{V}'(t)|Z_t\} = \boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)\boldsymbol{S}(t)\delta(t-\tau) \tag{61}$$

ただし

$\boldsymbol{\xi}_1(t|t)$: $n_3 \times n_1$ 行列

$\boldsymbol{\xi}_2(t|t)$: $n_3 \times n_2$ 行列

$\boldsymbol{\alpha}(t|t)$: $n_1 \times n_1$ 行列

$\boldsymbol{\beta}(t|t)$: $n_1 \times n_2$ 行列

$\boldsymbol{\gamma}(t|t)$: $n_2 \times n_1$ 行列

$\boldsymbol{\delta}(t|t)$: $n_2 \times n_2$ 行列

3. 拡大システムによる線形推定過程

さて問題2に対する解をあたえるのに必要な補助的な性質を導こう。先に筆者によれば次のような問題が解かれている[2)]。すなわち，力学系，観測系がそれぞれ

$$\frac{d\boldsymbol{x}(t)}{dt} = \boldsymbol{F}_1(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{G}_1(t)\boldsymbol{W}_1(t) \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{62}$$

$$\frac{d\boldsymbol{y}(t)}{dt} = \boldsymbol{F}_2(t)\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{G}_2(t)\boldsymbol{W}_2(t) \quad \boldsymbol{y}(t_0) = \boldsymbol{y}_0 \tag{63}$$

$$\boldsymbol{Z}(t) = \boldsymbol{H}_1(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{H}_2(t)\boldsymbol{y}(t) + \boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{V}(t) \tag{64}$$

であたえられているとする。このとき

$$E[\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t|t)]^2$$

を最小にする線形推定 $\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)$ を

$$\hat{\boldsymbol{x}}(t|t) = E\{\boldsymbol{x}(t)|Z_t\} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{A}(t,\tau)\boldsymbol{Z}(\tau)d\tau \tag{65}$$

$$E[\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{y}(t) - \hat{\boldsymbol{y}}(t|t)]^2$$

を最小にする推定 $\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)$ を

$$\hat{\boldsymbol{y}}(t|t) = E\{\boldsymbol{y}(t)|Z_t\} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{B}(t,\tau)\boldsymbol{Z}(\tau)d\tau \tag{66}$$

としたときの最適推定が次のようにあたえられている。

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)}{dt} = \boldsymbol{F}_1(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t|t) + \boldsymbol{K}_1(t)[\boldsymbol{Z}(t) - \boldsymbol{H}_1(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)] - \boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{H}_2(t)\hat{\boldsymbol{y}}(t|t) \tag{67}$$

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)}{dt} = \boldsymbol{F}_2(t)\hat{\boldsymbol{y}}(t|t) + \boldsymbol{K}_2(t)[\boldsymbol{Z}(t) - \boldsymbol{H}_2(t)\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)] - \boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{H}_1(t)\hat{\boldsymbol{x}}(t|t) \tag{68}$$

ここで未知の $\boldsymbol{K}_1(t)$，$\boldsymbol{K}_2(t)$ は次式であたえられる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_1(t) = {} & \boldsymbol{P}_1(t|t)\boldsymbol{H}_1'(t)[\boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Gamma}'(t)]^{-1} \\ & + \boldsymbol{\Sigma}_t^1\boldsymbol{H}_2(t)'[\boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{S}(t(\boldsymbol{\Gamma}(t)]^{-1} \end{aligned} \tag{69}$$

$$\boldsymbol{K}_2(t)=\boldsymbol{P}_2(t|t)\boldsymbol{H}_2'(t)[\boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Gamma}'(t)]^{-1}+\boldsymbol{\Sigma}_t{}^2\boldsymbol{H}_1'(t)[\boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Gamma}'(t)]^{-1} \tag{70}$$

また誤差に関連する分散行列 $\boldsymbol{P}_1(t|t), \boldsymbol{\Sigma}_t{}^1, \boldsymbol{P}_2(t|t), \boldsymbol{\Sigma}_t{}^2$ を

$$\boldsymbol{P}_1(t|t)=\mathrm{cov}[\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t), \boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)] \tag{71}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_t{}^1=\mathrm{cov}[\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t), \boldsymbol{y}(t)]$$

$$\boldsymbol{P}_2(t|t)=\mathrm{cov}[\boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t|t), \boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)] \tag{72}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_t{}^2=\mathrm{cov}[\boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t|t), \boldsymbol{x}(t)] \tag{73}$$

また

$$\boldsymbol{\Sigma}_t{}^3=\mathrm{cov}[\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t), \boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)] \tag{74}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_t{}^4=\mathrm{cov}[\boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t|t), \boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)] \tag{75}$$

と定めると，それらは次の微分方程式群で支配されている。

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{P}_1(t|t)}{dt}=&[\boldsymbol{F}_1(t)-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{H}_1(t)]\boldsymbol{P}_1(t|t)\\&+\boldsymbol{P}_1(t|t)[\boldsymbol{F}_1(t)-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{H}_1(t)]'\\&+\boldsymbol{G}_1(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{G}_1'(t)+\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Gamma}'(t)\boldsymbol{K}_1'(t)\\&-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{H}_2(t)\boldsymbol{\Sigma}_t{}^4-\boldsymbol{\Sigma}_t{}^3\boldsymbol{H}_2'(t)\boldsymbol{K}_1'(t)\end{aligned} \tag{76}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{P}_2(t|t)}{dt}=&[\boldsymbol{F}_2(t)-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{H}_2(t)]\boldsymbol{P}_2(t|t)\\&+\boldsymbol{P}_2(t|t)[\boldsymbol{F}_2(t)-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{H}_2(t)]'\\&+\boldsymbol{G}_2(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{G}_2'(t)+\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Gamma}'(t)\boldsymbol{K}_2'(t)\\&-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{H}_1(t)\boldsymbol{\Sigma}_t{}^3-\boldsymbol{\Sigma}_t{}^4\boldsymbol{H}_1'(t)\boldsymbol{K}_2'(t)\end{aligned} \tag{78}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\Sigma}_t{}^1}{dt}[\boldsymbol{F}_1(t)-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{H}_1(t)]\boldsymbol{\Sigma}_t{}^1+\boldsymbol{\Sigma}_t{}^1\boldsymbol{F}_2'(t)-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{H}_2(t)\boldsymbol{P}_2(t|t) \tag{79}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\Sigma}_t{}^2}{dt}=[\boldsymbol{F}_2(t)-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{H}_2(t)]\boldsymbol{\Sigma}_t{}^2+\boldsymbol{\Sigma}_t{}^2\boldsymbol{F}_1'(t)-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{H}_1(t)\boldsymbol{P}_1(t|t) \tag{80}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{\Sigma}_t{}^3}{dt}=&[\boldsymbol{F}_1(t)-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{H}_1(t)]\boldsymbol{\Sigma}_t{}^3+\boldsymbol{\Sigma}_t{}^3[\boldsymbol{F}_2(t)-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{H}_2(t)]'\\&+\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Gamma}'(t)\boldsymbol{K}_2'(t)-\boldsymbol{P}_1(t|t)\boldsymbol{H}_1'(t)\boldsymbol{K}_2'(t)\\&-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{H}_2(t)\boldsymbol{P}_2(t|t)\end{aligned} \tag{81}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{\Sigma}_t{}^4}{dt}=&[\boldsymbol{F}_2(t)-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{H}_2(t)]\boldsymbol{\Sigma}_t{}^4+\boldsymbol{\Sigma}_t{}^4[\boldsymbol{F}_1(t)-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{H}_1(t)]'\\&+\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Gamma}'(t)\boldsymbol{K}_1'(t)-\boldsymbol{P}_2(t|t)\boldsymbol{H}_2'(t)\boldsymbol{K}_1'(t)\\&-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{H}_1(t)\boldsymbol{P}_1(t|t)\end{aligned} \tag{82}$$

ただし，

$\boldsymbol{F}_1(t)$: $n_1\times n_1$ 行列

$\boldsymbol{F}_2(t)$: $n_2\times n_2$ 行列

$\boldsymbol{H}_1(t)$: $n_3\times n_1$ 行列

$\boldsymbol{H}_2(t)$: $n_3\times n_2$ 行列

$\boldsymbol{\Gamma}(t)$: $n_3 \times d$ 行列

また $\boldsymbol{A}(t,\tau)$, $\boldsymbol{B}(t,\tau)$ はそれぞれ $n_1 \times n_3$ $n_2 \times n_3$ 行列でインパルス応答関数を表わし，その要素は t, τ について連続微分可能とする。またそれらの物理的実現可能性は保証されるものとする。それ以外の記号は前と同様とする。

したがって(67)，(68)によって最適推定過程が完全にあたえられる為には(76)～(82)の微分方程式と共に連立微分方程式として解かねばならない。しかしながら，仮にこのようにしてえられた最適推定がはたして最適であるかどうかの保証はない。

いま(62)，(63)の力学系，および(64)の観測系を次のような拡大システムに書きかえることにする。

$$\boldsymbol{X}(t)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}(t)\\ \boldsymbol{y}(t)\end{pmatrix} : (n_1+n_2)\times 1 \text{ ベクトル} \tag{83}$$

$$\boldsymbol{F}(t)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{F}_1(t) & 0\\ 0 & \boldsymbol{F}_2(t)\end{pmatrix} : (n_1+n_2)\times(n_1+n_2) \text{ 行列} \tag{84}$$

$$\boldsymbol{G}(t)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{G}_1(t) & 0\\ 0 & \boldsymbol{G}_2(t)\end{pmatrix} : (n_1+n_2)\times(m_1+m_2) \text{ 行列} \tag{85}$$

$$\boldsymbol{W}(t)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{W}_1(t)\\ \boldsymbol{W}_2(t)\end{pmatrix} : (m_1+m_2)\times 1 \text{ ベクトル} \tag{86}$$

$$\boldsymbol{H}(t)=[\boldsymbol{H}_1(t), \boldsymbol{H}_2(t)] : n_3\times(n_1+n_2) \tag{87}$$

と定めることによって

$$\frac{d\boldsymbol{X}(t)}{dt}=\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{W}(t) \tag{88}$$

$$\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}_0$$

$$\boldsymbol{Z}(t)=\boldsymbol{H}(t)\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{V}(t) \tag{89}$$

をうる。$\boldsymbol{Z}(t)$ なる観測値があたえられて $\boldsymbol{x}(t)$ の最適推定 $\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)$ を求めるのを，一応 $\boldsymbol{X}(t)$ の最適推定 $\hat{\boldsymbol{X}}(t|t)$ を求めるという問題に変換することにする。その結果から $\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)$ を求めようとするわけである。(88)，(89)であたえられるシステムに対しての最適推定を求めるのはことさら目新しいことではなくて Kalman と Bucy[3] によってあたえられている。結果を書くと $E[\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{X}(t)-\hat{\boldsymbol{X}}(t|t)]^2$ を最小にする最適推定 $\hat{\boldsymbol{X}}(t|t)$ が満足しなければならぬ必要十分条件は，$t_0 \leqq \tau < t$ に対して

$$\mathrm{cov}[\tilde{\boldsymbol{X}}(t|t), \boldsymbol{Z}(\tau)]=0 \tag{90}$$

である。ここで $\boldsymbol{X}^*$ は $\boldsymbol{X}(t)$ の共状態ベクトルを示している。さらに

$$\tilde{\boldsymbol{X}}(t|t)=\boldsymbol{X}(t)-\hat{\boldsymbol{X}}(t|t)$$

である。さらに $\hat{\boldsymbol{X}}(t|t)$ は次式で支配される。

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{X}}(t|t)}{dt}=\boldsymbol{F}(t)\hat{\boldsymbol{X}}(t|t)+\boldsymbol{K}(t)[\boldsymbol{Z}(t)-\boldsymbol{H}(t)\hat{\boldsymbol{X}}(t|t)] \tag{91}$$

$$\boldsymbol{K}(t)=\boldsymbol{P}(t|t)\boldsymbol{H}'(t)\boldsymbol{\Gamma}'(t)^{-1}\boldsymbol{S}(t)^{-1}\boldsymbol{\Gamma}(t)^{-1}$$

$$=\boldsymbol{P}(t|t)\boldsymbol{H}'(t)[\boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Gamma}'(t)]^{-1} \tag{92}$$

ここで $\boldsymbol{P}(t|t)$ は次の分散微分方程式であたえられる。

$$\frac{d\boldsymbol{P}(t|t)}{dt}=[\boldsymbol{F}(t)-\boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{H}(t)]\boldsymbol{P}(t|t)+\boldsymbol{P}(t|t)[\boldsymbol{F}(t)-\boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{H}(t)]'$$
$$+\boldsymbol{K}(t)\boldsymbol{\Gamma}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Gamma}'(t)\boldsymbol{K}'(t)+\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{Q}(t)\boldsymbol{G}'(t) \tag{93}$$

ただし,

$$\boldsymbol{P}(t|t)=\mathrm{cov}[\tilde{\boldsymbol{X}}(t|t),\tilde{\boldsymbol{X}}(t|t)] \tag{94}$$

また(90)の系として

$$\mathrm{cov}[\tilde{\boldsymbol{X}}(t|t),\hat{\boldsymbol{X}}(t|t)]=0 \tag{95}$$

もすでにあたえられている[3]。上式は容易に

$$\begin{pmatrix}\mathrm{cov}[\tilde{\boldsymbol{x}}(t|t),\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)], & \mathrm{cov}[\tilde{\boldsymbol{x}}(t|t),\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)]\\ \mathrm{cov}[\tilde{\boldsymbol{y}}(t|t),\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)], & \mathrm{cov}[\tilde{\boldsymbol{y}}(t|t),\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)]\end{pmatrix}=0 \tag{96}$$

とかきかえることができるから

$$\mathrm{cov}[\tilde{\boldsymbol{x}}(t|t),\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)]=0 \tag{97}$$

$$\mathrm{cov}[\tilde{\boldsymbol{x}}(t|t),\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)]=0 \tag{98}$$

$$\mathrm{cov}[\tilde{\boldsymbol{y}}(t|t),\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)]=0 \tag{99}$$

$$\mathrm{cov}[\tilde{\boldsymbol{y}}(t|t),\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)]=0 \tag{100}$$

をうる。

(97)～(100)に(65), (66)を代入すると

$$\mathrm{cov}[\tilde{\boldsymbol{x}}(t|t),\boldsymbol{Z}(\tau)]=0 \tag{101}$$

$$\mathrm{cov}[\tilde{\boldsymbol{y}}(t|t),\boldsymbol{Z}(\tau)]=0 \tag{102}$$

をうる。ただし

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t|t)=\boldsymbol{x}(t)-\hat{\boldsymbol{x}}(t|t) \tag{103}$$

$$\tilde{\boldsymbol{y}}(t|t)=\boldsymbol{y}(t)-\hat{\boldsymbol{y}}(t|t) \tag{104}$$

したがって $\hat{\boldsymbol{x}}(t|t),\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)$ は実は最適な推定であることが証明された。

また

$$\boldsymbol{\Sigma}_t^3=\mathrm{cov}[\tilde{\boldsymbol{x}}(t|t),\tilde{\boldsymbol{y}}(t|t)]=\boldsymbol{\Sigma}_t^1-\mathrm{cov}[\tilde{\boldsymbol{x}}(t|t),\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)]=\boldsymbol{\Sigma}_t^1 \tag{105}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_t^4=\mathrm{cov}[\tilde{\boldsymbol{y}}(t|t),\tilde{\boldsymbol{x}}(t|t)]=\boldsymbol{\Sigma}_t^2-\mathrm{cov}[\tilde{\boldsymbol{y}}(t|t),\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)]=\boldsymbol{\Sigma}_t^2 \tag{106}$$

となる。よって(81), (82)の微分方程式は実は冗長なものであって，それらはそれぞれ(79), (80)と等価ということになる。

4.　拡大システムによる擬線形状態推定過程

このようにしてえられた補助的性質をふまえながら，まづ(41), (42)であたえられた変換された力学系および(46)であたえられる観測系においてその拡大システムを次のように導入する。

$$\boldsymbol{\xi}(t)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\xi}^x(t)\\ \boldsymbol{\xi}^y(t)\end{pmatrix} \tag{107}$$

$$\boldsymbol{\Theta}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Theta}_1(t) & 0\\ 0 & \boldsymbol{\Theta}_2(t)\end{bmatrix} \tag{108}$$

$$\boldsymbol{G}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{G}_1(t) & 0\\ 0 & \boldsymbol{G}_2(t)\end{bmatrix} \tag{109}$$

$$\boldsymbol{W}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{W}_1(t)\\ \boldsymbol{W}_2(t)\end{bmatrix} \tag{110}$$

$$\boldsymbol{\Theta}_{3x}{}^{\eta}(t)=[\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t), \boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)] \tag{111}$$

とおいて力学系，観測系はそれぞれ

$$\frac{d\boldsymbol{\xi}(t)}{dt}=\boldsymbol{\Theta}(t)\boldsymbol{\xi}(t)+\boldsymbol{G}(t)\boldsymbol{W}(t) \quad \boldsymbol{\xi}(t_0)=\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}_0 \tag{112}$$

$$\overline{\boldsymbol{\eta}}(t)=\boldsymbol{\Theta}_{3x}{}^{\eta}(t)\boldsymbol{\xi}(t)+\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)\boldsymbol{V}(t) \quad \overline{\boldsymbol{\eta}}(t_0)=0 \tag{113}$$

となる。ここで(32)，(34)より

$$\boldsymbol{\xi}(t|t)=\boldsymbol{X}(t|t)+\boldsymbol{\rho}(t) \tag{114}$$

であって

$$\boldsymbol{\rho}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\rho}^x(t)\\ \boldsymbol{\rho}^y(t)\end{bmatrix} \tag{115}$$

であり，かつ

$$\boldsymbol{\rho}(t)=\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{\Phi}(t,s)\{\boldsymbol{\Theta}(s)\boldsymbol{X}(s)-\boldsymbol{\theta}(s)\}\,ds \tag{116}$$

で定められている。ただし $\boldsymbol{\Phi}(t,s)$ は

$$\frac{d\boldsymbol{X}(t)}{dt}=\boldsymbol{\Theta}(t)\boldsymbol{X}(t) \tag{117}$$

の推移行列を示し

$$\boldsymbol{\theta}(s)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\theta}_1(s)\\ \boldsymbol{\theta}_2(s)\end{bmatrix} \tag{118}$$

である。

ここで(88)，(89)と(112)，(113)とは全く同形のシステムであることに注意して，次のような各記号の変換を行うことによって，ただちに最適推定過程をうることになる。すなわち

$$\boldsymbol{x}(t)\to\boldsymbol{\xi}^x(t),\ \boldsymbol{y}(t)\to\boldsymbol{\xi}^y(t),\ \boldsymbol{X}(t)\to\boldsymbol{\xi}(t)$$

$$\boldsymbol{F}_1(t)\to\boldsymbol{\Theta}_1(t),\ \boldsymbol{F}_2(t)\to\boldsymbol{\Theta}_2(t),\ \boldsymbol{F}(t)\to\boldsymbol{\Theta}(t)$$

$$\boldsymbol{H}_1(t)\to\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t),\ \boldsymbol{H}_2(t)\to\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t),\ \boldsymbol{H}(t)\to\boldsymbol{\Theta}_{3X}{}^{\eta}(t)$$

$$\boldsymbol{\Gamma}(t)\to\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t),\ \boldsymbol{Z}(t)\to\overline{\boldsymbol{\eta}}(t)$$

とおきかえると

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\xi}}(t|t)}{dt}=\boldsymbol{\Theta}(t)\hat{\boldsymbol{\xi}}(t|t)+\boldsymbol{K}(t)[\overline{\boldsymbol{\eta}}(t)-\boldsymbol{\Theta}_{3X}{}^{\eta}(t)\hat{\boldsymbol{\xi}}(t|t)] \tag{119}$$

$$\boldsymbol{\xi}(t_0)=\boldsymbol{X}(t_0)=\boldsymbol{X}_0$$

$$K(t)=P(t)\boldsymbol{\Theta}_3{}'x^{\eta}[\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)S(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}{}'(t)]^{-1} \tag{120}$$

ただし，

$$P(t|t)=\begin{pmatrix} P_1(t|t) & \Sigma_t{}^1 \\ \Sigma_t{}^2 & P_2(t|t) \end{pmatrix} \tag{121}$$

で定められる誤差の分散行列であって，次の微分方程式で支配される。ただし，

$$P_1(t|t)=\mathrm{cov}[\tilde{\xi}^x(t|t),\tilde{\xi}^x(t|t)]=\mathrm{cov}[\tilde{x}(t|t),\tilde{x}(t|t)] \tag{122}$$

$$P_2(t|t)=\mathrm{cov}[\tilde{\xi}^y(t|t),\tilde{\xi}^y(t|t)]=\mathrm{cov}[\tilde{y}(t|t),\tilde{y}(t|t)] \tag{123}$$

$$\Sigma_t{}^1=\mathrm{cov}[\tilde{\xi}^x(t|t),\tilde{\xi}^y(t|t)]=\mathrm{cov}[\tilde{x}(t|t),\tilde{y}(t|t)] \tag{124}$$

$$\Sigma_t{}^2=\mathrm{cov}[\tilde{\xi}^y(t|t),\tilde{\xi}^x(t|t)]=\mathrm{cov}[\tilde{y}(t|t),\tilde{x}(t|t)] \tag{125}$$

なる性質を持っている。

$$\begin{aligned}\frac{dP(t|t)}{dt}&=[\boldsymbol{\Theta}(t)-K(t)\boldsymbol{\Theta}_{3}x^{\eta}(t)]P(t|t)+P(t|t)[\boldsymbol{\Theta}(t)-K(t)\boldsymbol{\Theta}_{3}x^{\eta}(t)]'\\&\quad+K(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)S(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}{}'(t)K'(t)+G(t)Q(t)G'(t)\end{aligned} \tag{126}$$

(119)～(126)からただちに，(114)に注意して

$$\hat{\xi}(t|t)=\hat{X}(t|t)+\rho(t) \tag{127}$$

なる関係によって，もう一度 $X(t)$ に変換しなおすことによって結局

$$\frac{d\hat{x}(t|t)}{dt}=\boldsymbol{\theta}_1(t)+K_1(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)V(t)=\hat{F}_1[t,x(t)]+K_1(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)V(t) \tag{128}$$

$$\frac{d\hat{y}(t|t)}{dt}=\boldsymbol{\theta}_2(t)+K_2(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)V(t)=\hat{F}_2[t,y(t)]+K_2(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)V(t) \tag{129}$$

をうる。ここで未知の $K_1(t)$, $K_2(t)$ は

$$\begin{aligned}K_1(t)&=P_1(t|t)\boldsymbol{\Theta}_{3x}{}'(t)[\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)S(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}{}'(t)]^{-1}\\&\quad+\Sigma_t{}^1\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)[\boldsymbol{\Theta}_{3v}{}'(t)S(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}{}'(t)]^{-1}\end{aligned} \tag{130}$$

$$\begin{aligned}K_2(t)&=P_2(t|t)\boldsymbol{\Theta}_{3y}{}'(t)[\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)S(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}{}'(t)]^{-1}\\&\quad+\Sigma_t{}^2\boldsymbol{\Theta}_{3x}{}'(t)[\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)S(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}{}'(t)]^{-1}\end{aligned} \tag{131}$$

で計算される。さらに $P_1(t|t), P_2(t|t), \Sigma_t{}^1\ \Sigma_t{}^2$ はそれぞれ次の微分方程式の解としてあたえられる。

$$\begin{aligned}\frac{dP_1(t|t)}{dt}&=[\boldsymbol{\Theta}_1(t)-K_1(t)\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)]P_1(t|t)\\&\quad+P_1(t|t)[\boldsymbol{\Theta}_1(t)-K_1(t)\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)]'+G_1(t)Q(t)G_1{}'(t)\\&\quad+K_1(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)S(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}{}'(t)K_1{}'(t)-K_1(t)\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)\Sigma_t{}^2\\&\quad-\Sigma_t{}^1\boldsymbol{\Theta}_{3y}{}'(t)K_1{}'(t)\end{aligned} \tag{132}$$

$$\begin{aligned}\frac{dP_2(t|t)}{dt}&=[\boldsymbol{\Theta}_2(t)-K_2(t)\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)]P_2(t|t)\\&\quad+P_2(t|t)[\boldsymbol{\Theta}_2(t)-K_2(t)\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)]'\\&\quad+G_2(t)Q(t)G_2{}'(t)+K_2(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)S(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}{}'(t)K_2{}'(t)\\&\quad-K_2(t)\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)\Sigma_t{}^1-\Sigma_t{}^2\boldsymbol{\Theta}_{3x}{}'(t)K_2{}'(t)\end{aligned} \tag{133}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\Sigma}_t^1}{dt}=[\boldsymbol{\Theta}_1(t)-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)]\boldsymbol{\Sigma}_t^1+\boldsymbol{\Sigma}_t^1[\boldsymbol{\Theta}_2(t)-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)]'$$
$$+\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}'(t)\boldsymbol{K}_2'(t)-\boldsymbol{P}_1(t|t)\boldsymbol{\Theta}_{3x}'(t)\boldsymbol{K}_2'(t)$$
$$-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)\boldsymbol{P}_2(t|t) \tag{134}$$

$$\frac{d\boldsymbol{\Sigma}_t^2}{dt}=[\boldsymbol{\Theta}_2(t)-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{\Theta}_{3y}(t)]\boldsymbol{\Sigma}_t^2+\boldsymbol{\Sigma}_t^2[\boldsymbol{\Theta}_1(t)-\boldsymbol{K}_1(t)\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)]'$$
$$+\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}(t)\boldsymbol{S}(t)\boldsymbol{\Theta}_{3v}'(t)\boldsymbol{K}_1'(t)$$
$$-\boldsymbol{P}_2(t|t)\boldsymbol{\Theta}_{3y}'(t)\boldsymbol{K}_1'(t)-\boldsymbol{K}_2(t)\boldsymbol{\Theta}_{3x}(t)\boldsymbol{P}(t|t) \tag{135}$$

ここでえられた推定 $\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)$ は補助的にあたえられる推定 $\hat{\boldsymbol{y}}(t|t)$ と共に最適であることは(97)，(100)の性質を使えば容易に示される。

5. むすび

このようにして，問題1を問題2に変えた上で拡大システムによる解法を述べた。最適推定 $\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)$ を求めるのに(28)，(29)，(30)を(41)，(42)で示される力学系および(46)で表わされる観測系に変換した上でその拡大システム(112)，(113)を定めてその最適問題を解いて，それにより最終的な最適推定過程(128)を導いた。しかしながら(128)が完全に解けるためには(129)と共に(132)～(135)，あわせて6個の連立微分方程式を解く必要のあることがわかった。このとき求められた $\hat{\boldsymbol{x}}(t|t)$ は最適であることも示された。先に筆者によって得られた結果によれば誤差に関する分散行列はあわせて6個の微分方程式で支配されていたけれども以上の考察によりそのうち2個の微分方程式は冗長なものであることが示された。なお具体的な計算例は別の機会に報告したい。

文　献

1） 天野正章：擬線形状態推定についての一考察，明大科研紀要 Vol. 13 No. 12 1974
2） 天野正章：多入力信号に対する最適推定：明大工研報告 No. 29 1974
3） R. E. Kalman & R. S. Bucy: New Results In Linear Filtering and Prediction Theory: ASME, J. Basic Eng, 83, 95–108 March 1961